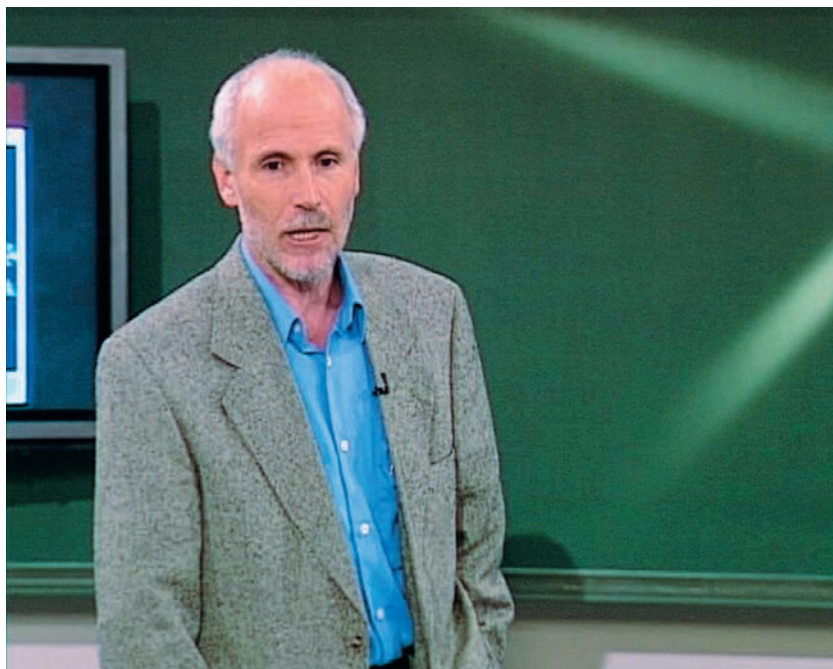


VICSEK TAMÁS

Rend és rendezetlen



Vicsek Tamás
fizikus
az MTA rendes tagja

A rend és a rendezetlenség problémaköre azért érdekes, mert olyan kérdéseket vet fel, amelyek mindennapjainkat is áthatják. Rend vagy rendetlenség jellemezheti az atomok vagy a mikroszkopikus élőlények világát, ugyanakkor megtalálható az íróasztalunktól kezdve a gondolatainkon át egészen a kollektív viselkedésformáinkig is. Az előadásból megtudhatjuk, hogy az igazán érdekes, változatos jelenségek éppen a két szélső eset, a rend és az összevisszaság határán történnek. Ezen a határvidéken jönnek létre a bonyolult geometriájú alakzatok, az ún. **fraktálok**, és a különböző, gazdag mintázatokat mutató, részben rendezett csoportos mozgások is.

1948-ban született. 1972-ben fizikusként végzett a moszkvai Lomonoszov Egyetemen. 1983-ban a fizikai tudományok kandidátusa, 1988-ban akadémiai doktora lett. 1995-ben az MTA levelező, majd 2001-ben rendes tagjává választották.

Pályáját az MTA Műszaki Fizikai Kutatóintézetében kezdte. Több külföldi egyetemen dolgozott mint vendégkutató, illetve vendégprofesszor. 1992-től az ELTE TTK Atomfizikai Tanszék, 1998-tól a Biológia Fizika Tanszék vezetője. Számos rangos magyar és külföldi szakfolyóirat szerkesztőbizottságának tagja.

Öt könyve és több mint 140 angol nyelvű tudományos közleménye jelent meg, amelyekre eddig több mint ötezer hivatkozás történt.

Főbb kutatási területei: perkolációelmélet, klasztermodellek szimulációja, aggregációs jelenségek, fraktálnövekedés, mintázatképződés (számítógépes és laboratóriumi kísérletek), kooperatív biológiai rendszerek modellezése és kísérleti vizsgálata.

Bevezető

A környezetünkben minden élőlény és tárgy nagyszámú és sokféle alkotóelemből épül fel. Ezek az alkotóelemek egymással kölcsönhatásba lépnek. A statisztikus fizika egyik központi kérdése az, hogy ha egymással kölcsönhatásban álló elemekből létrejön egy nagyobb egység, akkor a nagyobb



Baktériumtelepek. A fraktál alak itt optimális a táplálékszerzés szempontjából

Fraktál – törtdimenziós objektum:

fraktálok esetében a tömegnövekedéshez tartozó kitevő nem 1, 2 vagy 3 – tehát egy egész, mint a rúd, a korong és a gömb esetében –, hanem egy törtszám. A fraktálokról igen részletes bevezető található sok ábrával, példával és érdekes magyarázatokkal az alábbi címen: <http://www.kfki.hu/chemonet/hun/olvaso/fraktal/frintro.html>

Perkoláció – átszivárgási jelenség:

az angol „percolator” szó kávéfőzőt jelent. A fizikusok által vizsgált probléma eredete az a kérdés, hogy vajon képes-e a forró víz a kávészemcséken keresztül a kávéfőző belsejének egyik végétől a másikig átszivárogni. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a légrések egymással érintkeznek, és véletlenszerűen helyezkednek el. Matematikailag tehát a következőképp fogalmazható meg a probléma: adott egy tartomány, amelyen belül véletlenszerűen elhelyezünk részecskéket (pl. kávészemcséket). Kérdés: hány darab részecske esetén áll még fent, hogy a tartomány egyik szélétől a másikig el tudunk jutni egymással érintkező légrésekben keresztül?



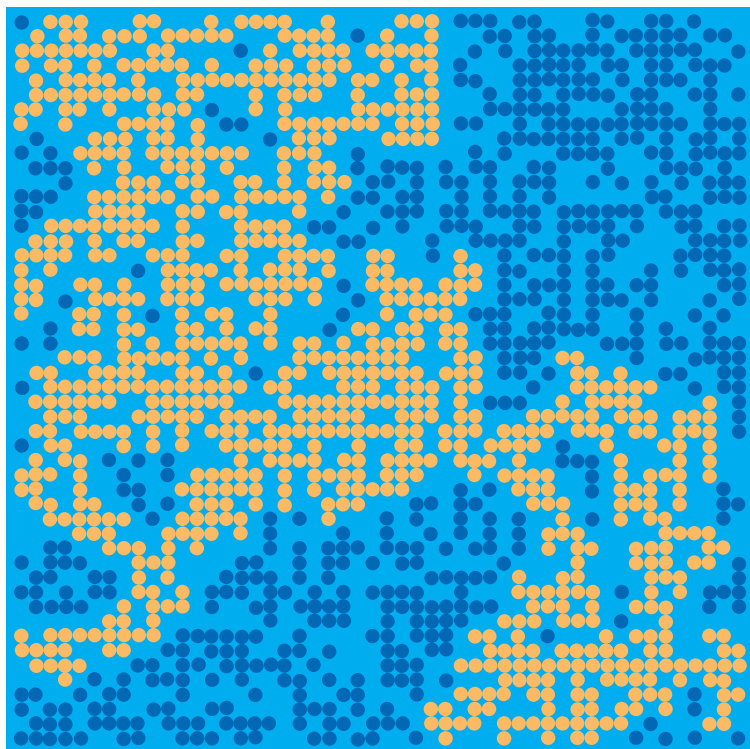
egység viselkedése leírható-e anélkül, hogy az egyes alkotóelemek viselkedését külön-külön leírnánk. Az egyszerű, élettelen elemekből álló rendszerekben a válasz gyakran ismert. Egy pohár víz fagyását részletesen le tudjuk írni annak ellenére, hogy a fagyás során az összes vízmolekulát nem tudjuk követni.

A statisztikus fizika matematikai eszközei és a számítógépek fejlődése nyomán napjainkra már a bonyolultabb, élő alkotóelemekből álló rendszerek – baktériumtelepek, madárrajok vagy akár embercsoportok – vizsgálata is lehetővé vált. Az élő rendszerek egyik legfontosabb tulajdonsága a mozgás, ami a rendezetlen és rendezett állapotok közötti átmenetek új fajtait teszi lehetővé. Egyes baktériumok milliói képesek egyetlen forgó tömegbe rendeződni, akárcsak a mekkai Kába-követ körbejáró zarándokok; a megijesztett galambok egy-két másodpercen belül rendezetten, azonos irányban fognak repülni; a különböző irányokban haladó gyalogosok pedig gyakran haladási irányuk szerinti csoportokra válnak szét.

A rend és a rendezetlenség formái a fizikában

Egy egyszerű átalakulás vizsgálata

Az átalakulások gyakran geometriailag is igen érdekes alakzatokat produkálnak. Példaként vizsgáljunk meg egy igen egyszerű és jól ismert átalakulást. Egy négyzet alakú területet kezdjük el feltölteni véletlenszerűen elhelyezett korongokkal – a korongokat egy képzeletbeli négyzetrács csúcspontjaira helyezzük. Kezdetben a négyzeten belül rendezetlen pontok halmozát látjuk, ha pedig túl sokáig várunk, akkor már csak egy teljesen feltöltött négyzetet látunk. Valahol a két szélsőséges helyzet között lesz egy olyan pillanat, amikor megjelenik egy csoport, amelyik egymással érintkező korongokból áll, és a négyzet két átlós oldalát összeköti. Az átalakulási pontnál (tehát amikor megjelenik ez a csoport) a csoport szerkezete ágas-bogas, fraktál.



Egyszerű példa a rendeződésre

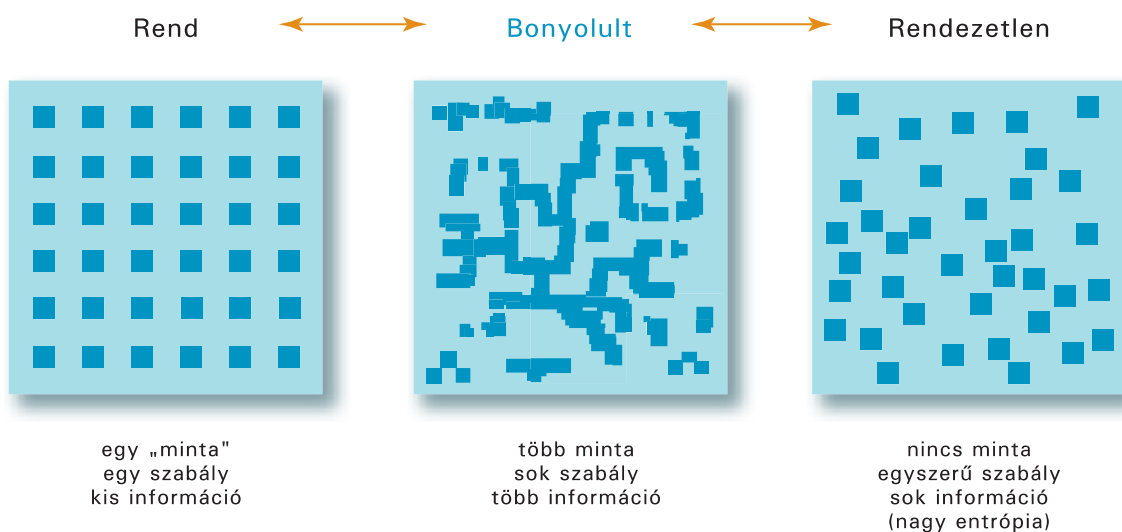
Fázisátalakulás – rendeződés hőmérséklet-változáskor:

a fázisátalakulás az egyik legjellemzőbb példa a rend–rendezetlen átmenetre. Tipikus példa a folyadékokban történő változás fagyáskor. Az olvadékban a molekulák még rendezetlenül, a legkülönbözőbb pozíciókban találhatók, míg az oladási hőmérséklet alá hűtve a folyadékot, az történik, hogy a molekulák kristályrácsba rendeződnek.

Az érdekes dolgok az átmenetnél történnek

Az átmenetek legtöbbször **fázisátalakulással** járnak: a fagyás során a folyékony halmazállapotú víz kristályos jéggé alakul. Másképpen fogalmazva: a hőmérséklet csökkentése során az anyag a folyékony fázisból átmegy a

Hol érdekes?





A hópehely szerkezete

szilárd fázisba. A rácsszerű rendezettség és a rendezetlen szerkezet közötti átmenetre jó példát adnak az olyan, növekedéssel kialakuló ágas-bogas szerkezetek, mint a hópehely, de hasonló átalakulási jelenségek figyelhetők meg élő rendszerekben is. Az élő rendszerek fontos tulajdonsága az **önszerveződés**: ezek a rendszerek saját maguk külső beavatkozás nélkül alakítják ki összetett szerkezetüket.

Fraktálok

Térjünk rá az átalakulás során kialakuló szerkezetekre, amelyek gyakran ágas-bogas fraktálok. Miben különbözik egy fraktál szerkezete egy szokásos alakzattól, például egy egyenes rúdtól, egy körlaptól vagy egy gömbtől? Ha egy rúd hosszát R , növelem, akkor a tömege R -rel arányosan nő. Ha egy körlap sugara R , akkor a területe R négyzet szorozva π (pi)-vel, tehát a körlap tömege R négyzetével arányos. Hasonlóan az R sugarú gömb tömege R harmadik hatványával arányos. Általánosabban: a hétköznapi testek esetében a test méretének $[R\text{-nek}]$ a növelésével a test tömege R első, második vagy harmadik hatványa szerint nő, tehát a hatvány értéke egy pozitív egész szám (1, 2 vagy 3). Ezt a pozitív egészt a tárgy **dimenziójának** hívják; a rúd egydimenziós, a körlap kétdimenziós, a gömb pedig három. A fraktálok esetében ez a hatvány egy törtszám.

Konstruáljunk fraktált!

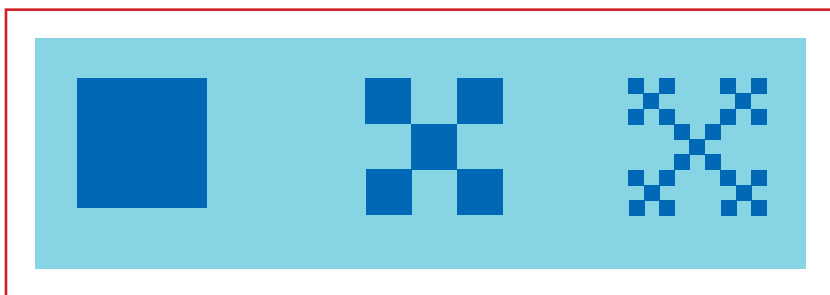
Rajzoljunk föl egy négyzetet, majd a négy sarkához illesszünk négy ugyanolyan négyzetet. Így öt négyzetet kapunk, melyek a sarkaiknál érintkeznek egymással. Most fogjuk meg ezt az öt négyzetből álló egységet, és ismételjük meg a korábbi másolást: az ábra négy sarkához másoljuk be a teljes ábrát. Ismételjük meg ezt a két lépést sokszor: (1) fogjuk meg a teljes ábrát; (2) másoljuk le a megfogott ábrát a meglévő ábra négy sarkához. A rajzolás közben természetesen folyamatosan kicsinyítenünk is kell az ábrát, hogy a papírunkra ráferjen. Az így kapott alakzat egy idő után hópehelyszerűnek tűnik, és bármilyen apró részlete nagyon hasonlít a teljes ábrához. A fraktálok önhasznóak.

Egy érdekes példa: amőbák rendeződése során kialakuló mintázatok

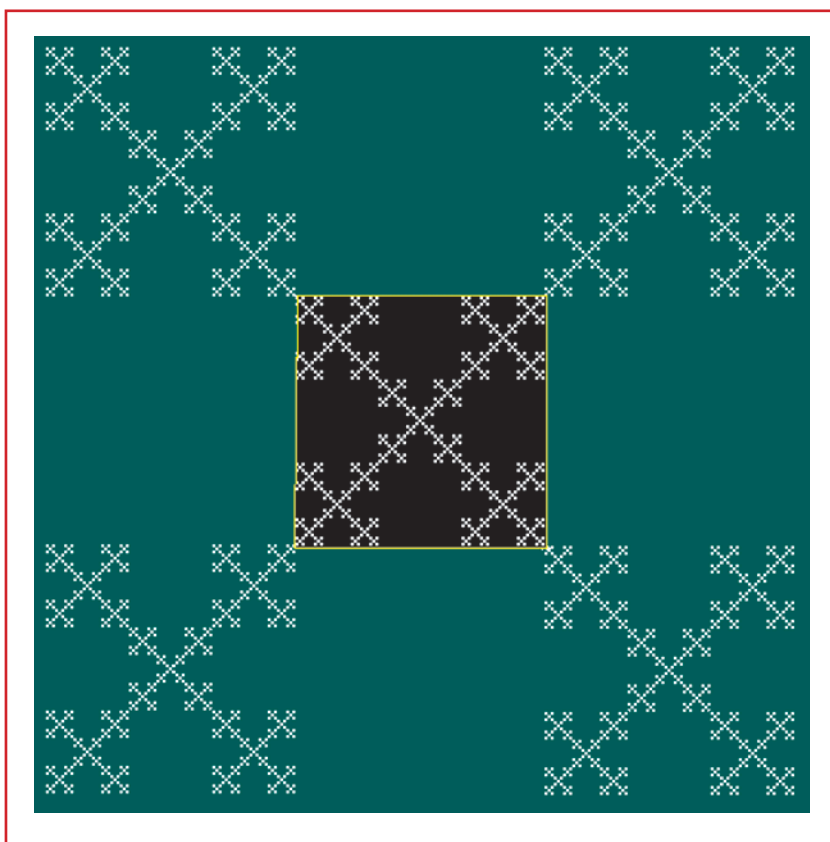
A *Dictyostelium discoideum* nevű amőbák erdei talajban élnek és az abban levő baktériumokkal táplálkoznak. Táplálékdús környezetben egymásról tudomást sem vesznek. Ha azonban elfogy a tápanyag, beindul a sejtek közötti kommunikáció, és a sejtek együttes mozgásukat – idegen szóval: kollektív mozgásukat – összehangolják. Az összehangolt mozgás eredményeképpen a sejtek nagyobb csomókba gyűlnek össze, és együtt keresnek táplálékot. Az átalakulás során érdekes, ágas-bogas alakzatokat figyelhetünk meg: az amőbák a folyómedrekhez hasonló útvonalak mentén gyűlnek össze.

Önszerveződés:

egy rendszerben, amely sok részecskét tartalmaz, a részecskék közösen, külső hatás nélkül alakítanak ki szerkezeteket. Nagyon sok példa van erre a jelenségre a természetben. Ide tartozik a hópehelyek növekedése is. A sokféle, szimmetrikus hópehely nyilvánvalóan olyan szerkezetű, amellyel az őket alkotó vízmolekulák eleve nem rendelkeznek. A folyamatot leíró egyenletek és a fluktuáló körülmények kölcsönös hatása vezet a számtalan gyönyörű kristály létrejöttéhez.



A fraktálok önhasznóak



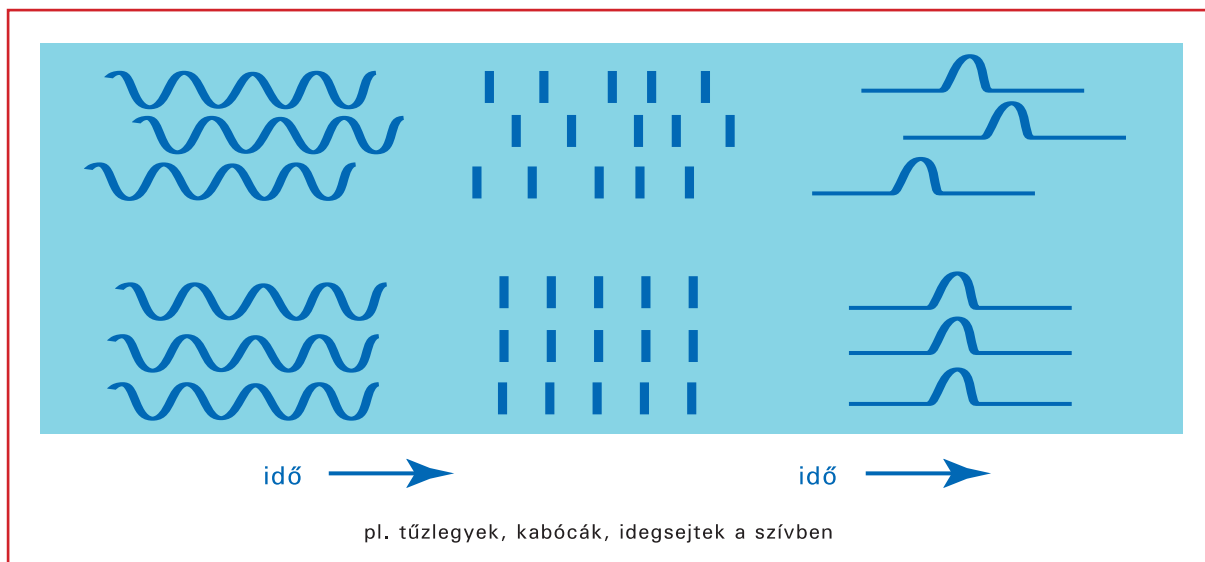
A megértés új eszköze, a modellezés: a fraktálnövekedés, a vastagság és a mexikói hullám modellezése

A fraktálnövekedés alapmodellje

A fraktálnövekedés egyik legfontosabb matematikai modellje a következő. Helyezzünk el egy kör középpontjában egy darab részecskét. Ezután indítunk el egy véletlenszerűen bolyongó részecskét a kör kerületéről. Ha a bolyongó részecske mozgása során hozzáér a középen lévő részecskéhez (illetve az ott korábban lerakódott részecskéhez), akkor odatapad, többé nem

Dimenzió – tömegnövekedési exponens:

hasonlítsunk össze egy R hosszúságú vékony rudat, egy R méretű lapos korongot és egy R méretű gömböt. Ha a rúd hosszát $2R$ -re növeljük, akkor tömege a méret első hatványával nő, és a korábbi tömeg $2^1 = 2$ -szerese lesz. Ha a korong méretét $2R$ -re növeljük, akkor a tömege a méret második hatványával nő, és a korábbi tömeg $2^2 = 4$ -szerese lesz, ha viszont a gömb méretét kétszeresére növeljük, akkor a tömege $2^3 = 8$ -szorosára nő, tehát a gömb tömege a méret harmadik hatványával nő. A növekedési sebességhez tartozó kitevő az adott tárgy dimenziója. (Precíz matematikai értelemben csak egy ún. „végtelenül vékony rúd” egydimenziós, és csak egy „végtelenül lapos” korong lehet kétdimenziós.)



*Rendeződés időben:
a szinkronizáció*

Szinkronizáció – időbeli jelenségek összehangolódása:

számos jelenség időbeli lefolyása periodikus, tehát időről időre szabályosan, ugyanolyan formában megismétlődő alegységekből áll. Periodikus a fényingadozás a Föld tengely körüli forgása következtében, mint ahogy az évszakok is periodikusan váltakoznak a Földnek a Nap körüli pályán való keringése miatt. Szinkronizáció során az eredetileg különböző fázisban levő periódusos mozgások összehangolódnak, azonos pillanatban következnek be a változó jelek maximumai vagy minimumai. Ha valaki egyenletesen tapsol, a hang periodikus. Ha sokan tapsolnak, de összevissza, akkor nincs szinkronizáció. A vastaps során a tenyerek mozgása összehangolódik, ez a szinkronizáció tipikus példája.

mozdul, és újabb bolyongó részecskét indítunk a kör kerületéről. Egy részecske véletlenszerű bolyongása szorosan kapcsolódik a diffúzió nevű jelenséghez, a megtapadást pedig idegen szóval aggregációnak nevezzük. Ezért a bemutatott modell neve diffúzió-limitált aggregáció. A modell egyik fontos tulajdonsága az önszerveződés, az alakzatok külső beavatkozás nélkül jönnek létre.

Rendeződés időben: szinkronizáció

Vizsgáljuk meg most az időbeli rendeződést is a már jól bevált módszerrel:

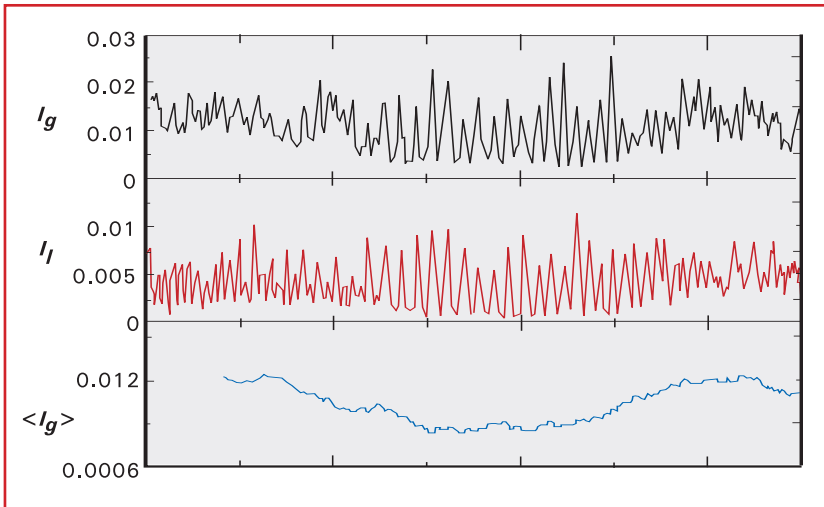
- › először elemezzük a jelenségeket több szempontból,
- › utána alkossunk modellt,
- › végül pedig vizsgáljuk meg, hogy a modell képes-e a jelenségnek olyan elemeit megjósolni, amelyeket a modellalkotás során nem használtunk fel.

Az időbeli rendeződés (idegen szóval: **szinkronizáció**) a természetben gyakori jelenség. Mindannyian jól ismerjük az egymással szinkronban cripelő tücskök hangját, közismert az is, hogy a szív sejtjei egymással összehangolva húzódnak össze, és egy-egy jó előadás után már sokan vettünk részt vastapsban, amikor szomszédainkkal szinkronizálva tapsoltunk.

Vastaps: az emberi viselkedés szinkronizációja és a szinkronizáció kvantitatív elemzése

Egy előadás utáni tapsviharban, amelyben az emberek először rendezetlenül tapsolnak, hirtelen, szinte „varázsütésre” létrejön a vastaps. A vastaps egy kis idő múlva ismét rendezetlen tapsolásba torkollik, majd újból megjelenik. A mérések szerint a vastaps során minden ember fele olyan gyorsan tapsol, mint a rendezetlen tapsolás alatt. Másképp fogalmazva: a tapsolás

periódusideje vastaps során kétszer akkora, mint a rendezetlen tapsolás során. A vastapsra megalkotott matematikai modell alátámasztja a perióduskettőzést.



Vastaps: kvantitatív analízis

A felső adatsor a taps teljes hangerejét mutatja. Látható, ahogy a véletlenszerűen változó jel periodikussá válik. A középső adatsor egyetlen néző által keltett hangintenzitás időfüggését ábrázolja. Jól szemlélteti, hogy a szinkronizáció kialakulásakor a tapsolás tempója felére csökken

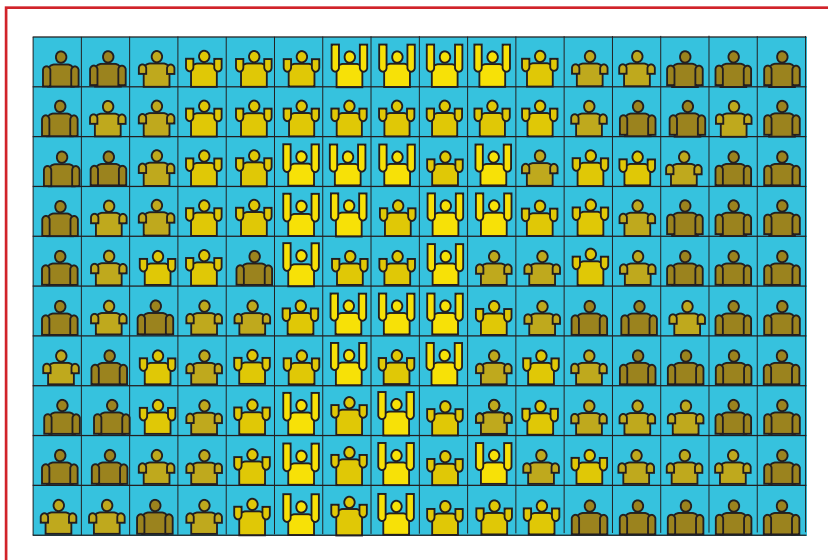
Mexikói hullám: az emberek térbeli és időbeli rendeződése

A térbeli és időbeli rendeződés egyik érdekes példája a mexikói hullám, amelyet stadionokban figyelhetünk meg olyankor, amikor a közönség a mérkőzés unalmasabb szakaszaiban önmagát akarja szórakoztatni. A lelátón egymás felett – egy oszlopban – ülők egyszerre felugranak, és még mielőtt leülnének, a mellettük lévők is átveszik a mozgást: és az álló emberek oszlopa a stadionban körbeszalad. Kutatásaink során 14 mexikói hullámról készült felvételt elemeztünk, amelyeknél az adott stadionban ötvenezer vagy több ember ült. Több más fontos paraméter mellett megmértük a hullám átlagos sebességét (12 m/s) és szélességét (10 m).

A mexikói hullám modellje

A mexikói hullám modellezése során a gerjeszthető közegekre használt, jól ismert modellekbe csupán néhány kisebb változtatást vezettünk be. A gerjeszthető közegek modelljeit leggyakrabban idegsejtek működésének leírására és kémiai reakciók modellezésére használják. A modell szempontjából egy idegsejtnak vagy egy kémiai oldatnak háromféle állapota lehetséges: gerjeszthető, aktív és nem gerjeszthető (ez utóbbit szokás passzív vagy refrakter állapotnak is nevezni). Az emberek mozgása során ezt a modellt a következőképp használtuk fel. Minden emberre csak a közeli szomszédai

Mexikói hullám modellje



hatnak, és ha elegendő számú szomszédja aktív (áll vagy éppen most ugrik talpra), akkor ő is aktiválódik (elkezd felállni).

A hullám két oldala különböző: a hullám egyik oldalán éppen felugranak az emberek, míg a másik oldalán éppen leülnek. A felugró emberek oldalán növekszik a hullám, tehát az a hullám eleje, míg a másik oldalon a leülő emberek az éppen befejezett felugrás után egy ideig nem szeretnének újból felállni, tehát azon az oldalon csak fogyhat a hullám, az a hullám hátsó oldala.

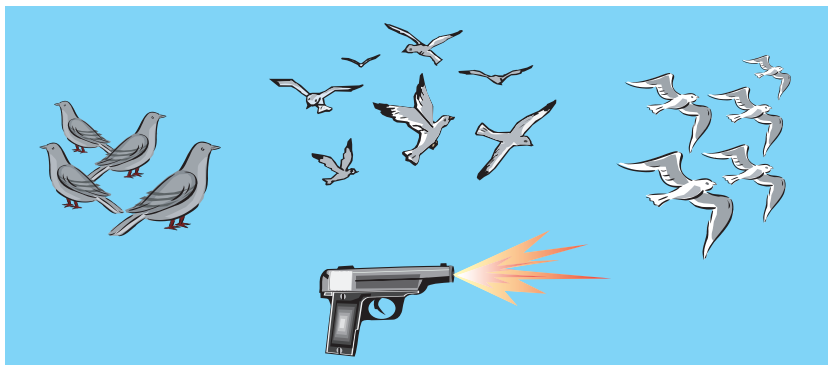
Rendeződés mozgás során

Amikor a madárcsapat felrebben

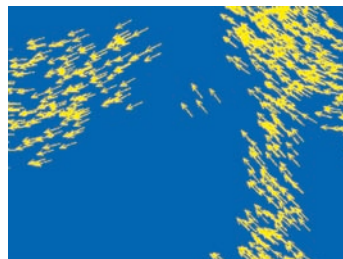
Ijesszünk meg egy nagy madárcsapatot hangos tapssal. Amikor a madárcsapat felrebben, minden madár repül, amerre lát. Ám legtöbbször néhány másodpercen belül a madarak mozgása rendeződik, és a teljes madárcsapat azonos irányba kezd mozogni.

A rendeződés oka a mozgás. Megfigyelhetjük például azt, hogy ha sok galamb vagy sok kiskacsa álldogál egy nagy területen, akkor mindegyik ma-

Amikor a madárcsapat felrebben



dár megpróbál a hozzá közel lévőkkal azonos irányba fordulni. De ha két madár egymástól távol áll, akkor már nem „érezik” elég erősen egymás hatását: mindig egymástól eltérő irányokba fordulnak, és a teljes madárcsapat rendezetlen marad. Ha viszont minden madár mozogni – például repülni – kezd abba az irányba, amerre éppen áll, akkor a mozgó egyedek távolabbi szomszédaikkal is találkozhatnak, és velük is egyeztetni tudják mozgási irányukat. Végül pedig a mozgás során a teljes madárcsoport rendeződik vagy néhány nagyobb csoportra szakad.

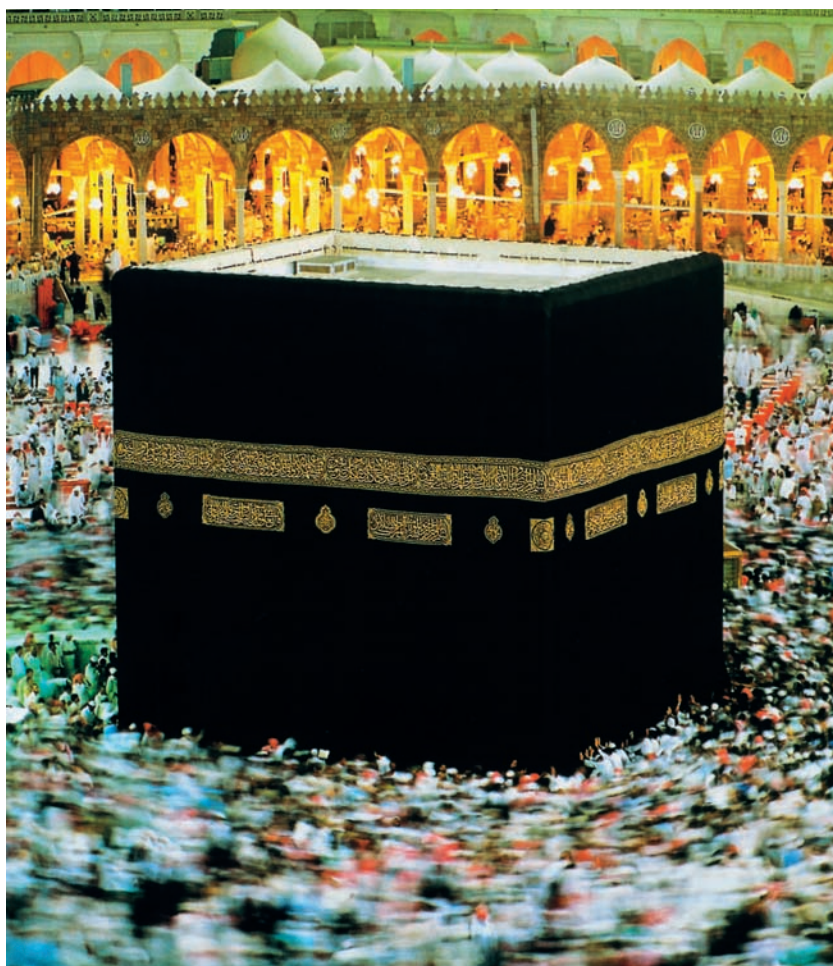


Madárcsapat szimulációja

A kollektív mozgás legegyszerűbb modelljében minden részecske a közvetlen környezetében lévő néhány további részecske átlagos haladási irányához igazodik. A részecskék sűrűségének és időnkénti – a modellben szintén figyelembe vett – véletlenszerű irányváltoztatásának függvényében, már ez az egyszerű algoritmus is realisztikus, a valódi madárcsapatok mozgására igen hasonló viselkedést eredményez.

Példák mozgás rendeződésére: forgó baktériumtelepek és zarándokok a Kába-kő körül

A mozgás során történő rendeződés közismert példája a Kába-követ minden évben meglátogató zarándokok mozgása, vagy az a körkörös mozgás, amely egy zsúfolt műjégpályán kialakul. Mindkét esetben a zárt területen a legegyszerűbb rendezett, csoportos mozgás valósul meg: a kör mentén történő, azonos irányú haladás. Ennek a betartását a Kába-kő és egy műjégpá-



Zarándokok a Kába-kő körül



Forgó baktériumtelep

A baktériumtelep spirálisan növekvő ágai végén kis forgó korongok vannak, amelyek kollektívan mozgó baktériumokat tartalmaznak

lya esetén is külön szabályok garantálják. (A Kába-követ meglátogató zarándokok számára vallási előírás, hogy a követ hétszer megkerüljék, és a zsúfolt műjégpályákon szintén van kötelező haladási irány.)

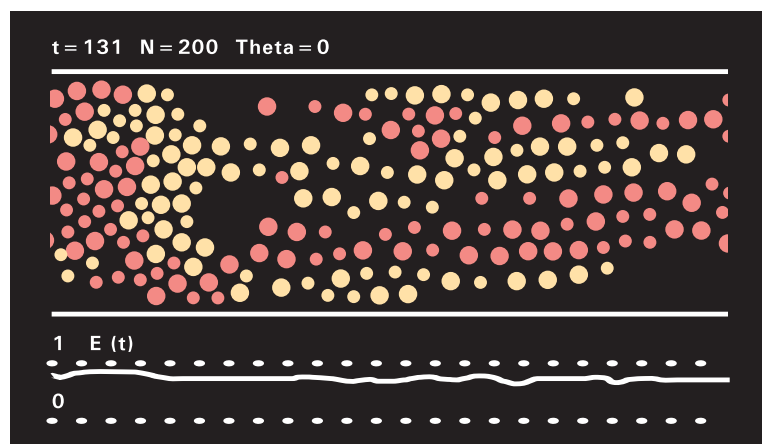
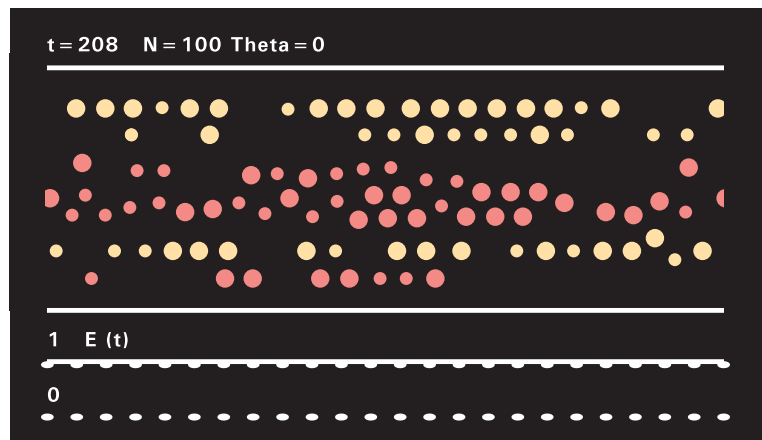
Egy, az emberek mozgásához hasonló példa megfigyelhető baktériumoknál is: a zárt területen folyamatosan mozgó baktériumok esetén szintén a körkörös mozgás a legstabilabb csoportos mozgási forma.

Embercsoportok mozgása

Ha sok ember, például a gyalogosok együttes mozgását vizsgáljuk, akkor sokszor a baktériumoknál és a madaraknál vagy akár az élettelen kristályoknál látott rendeződési jelenségek köszönnek vissza. A gyalogosok mozgásuk során egymástól és a falaktól, oszlopoktól próbálnak számukra kényelmes távolságot tartani. Ez a törekvés matematikailag kifejezhető emberi tulajdonságok nélkül is: ha a modellben minden embert egy részecskének tekintünk, akkor ugyanolyan taszítóerő kell hogy hasson az emberek között, mint egy kristályban két atom között. Ha két ember összeütközik, akkor rugalmas taszítóerő hat köztük, akárcsak két összenyomott gumilabda között.

Emberek a folyosón.

Fönt: kevés ember, lent sok ember



Szemben haladó emberek

A mozgás közben történő rendeződés gyalogosoknál gyakran tapasztalható. Ha néhány ember egy sűrű, nagy tömeg egyik végéről a másikra át akar jutni, akkor az első mögé rendeződve, egymást követve törnek utat maguknak. Ugyanez a jelenség figyelhető meg folyosókon és gyalogátkelőhelyeken is azzal a különbséggel, hogy ilyenkor mindenki az összesen két lehetséges haladási irány egyike felé szeretne mozogni.

A kialakuló mozgási mintázatok a speciális emberi tulajdonságok nélkül is létrejönnek: nincs szükség az udvariasság (vagy udvariatlanság), a két lábbon járás vagy a „jobbra tarts” szabályának figyelembevételére ahhoz, hogy ugyanazokat a gyalogosfolyamokat kapjuk a matematikai modellből. Csúpan két – matematikai egyenletekkel leírható – szabályra van szükség: minden gyalogos törekszik arra, hogy a többiekől megfelelő távolságot tartson, és hogy az elérni kívánt célja felé haladjon.

Ha a gyalogossűrűség alacsony, akkor a kialakuló gyalogosfolyamok egymást nem zavarják, és a tér- és időbeli rendezettség stabil, hosszú ideig fennmarad. Ha viszont egy folyosón sok a gyalogos, akkor a kialakuló folyamatok újból és újból egymásba ütköznek, és a kialakuló mozgás rendezetlen lesz.

Pánikhelyzet szimulációja

Végül vizsgáljuk meg a csoportos emberi mozgás egy különleges esetét. Tűzesetek során gyakori, hogy egy szobában az ott lévő füst miatt az emberek a kijáratokat nem látják, és csak a hozzájuk közel lévők mozgása alapján tudnak tájékozódni. Minden ember követi az általa helyesnek vélt haladási irányt (ha falba ütközik, visszafordul), és befolyásolhatja őt a közelében lévők mozgási iránya is. Az általunk végzett számítógépes **szimulációk** szerint lényeges különbség tapasztalható a két szélsőséges és az átmeneti stratégia között.

Ha minden ember csak a „saját feje után” szalad, akkor teljes fejetlenség alakul ki, és kevesen találják meg az ajtót. Ha mindenki szolgai módon követi a környezetében lévő többi embert, akkor egy-egy nagy csoport könnyen követ el végzetes hibát, és valamelyik sarokban megragadhat. Ha viszont a két véglet közötti stratégiát követik az emberek – tehát minden ember saját haladási irányát egy kissé befolyásolja a szomszédok iránya –, akkor sokan megmenekülnek. Ilyenkor a követés elég erős ahhoz, hogy a kijáratot megtaláló kis csoportok kifelé áramlását „megérezzék” a bent lévők, de az egyéni döntések is még elég erősek ahhoz, hogy nagy csoportok ne kövessenek el végzetes hibát. Ennél a példánál tehát azt tapasztaltuk, hogy a két szélsőség közötti átmenetnél lévő viselkedési forma az optimális.

Összefoglalásképpen elmondhatjuk, hogy a rend és a rendezetlenség határán sok érdekes, bonyolult jelenség figyelhető meg, amelyek a tudományban és mindennapi életünkben egyaránt fontos szerepet játszanak. A határon bekövetkező jelenségek kutatása és megértése a legújabb számítógépes modellek segítségével gyorsuló ütemben zajlik.

Szimuláció – számítógépes utánpótlás:

a természetben lejátszódó összetett folyamatokat hagyományosan egyenletek megoldásával írta le a fizika. Egyre jobban terjed, hogy a természeti jelenséget valamiféle modell formájában fogalmazzák meg a kutatók, amely modellt aztán lefordítható a számítógép nyelvére egy megfelelő algoritmus formájában. A jelenség így „lejátszható”, kicsiben leutánozható vagy szimulálható a számítógépben, és így vizsgálva könnyebben megérthető.



Ajánlott irodalom

Ben-Jacob, E. – Shochet, O. – Tenenbaum, A. – Cohen, I. – Czirok, András – Vicsek Tamás: Baktériumtelepek kooperatív növekedési mintázatai. *Fizikai Szemle*, 1994/8: 313.

Csepeli György: Szociálpszichológia. Bp.: Osiris 1997.

Helbing, D. – Farkas I. – Vicsek Tamás: A menekülési pánik tulajdonságainak szimulációja. *Fizikai Szemle*, 2000/10: 329; vagy <http://www.kfki.hu/fszemle/archivum/fsz0010/dirk.html>

Pataki Ferenc: A tömegek évszázada. Bp.: Osiris, 1998.

Vicsek Tamás: Fraktálnövekedés számítógépes szimulációja. *Fizikai Szemle*, 1998/7: 253.

Vicsek Tamás: Számítógépes szimuláció: A fizikai jelenségek megértésének új módszere. *Magyar Tudomány*, 1990/9: 1048.